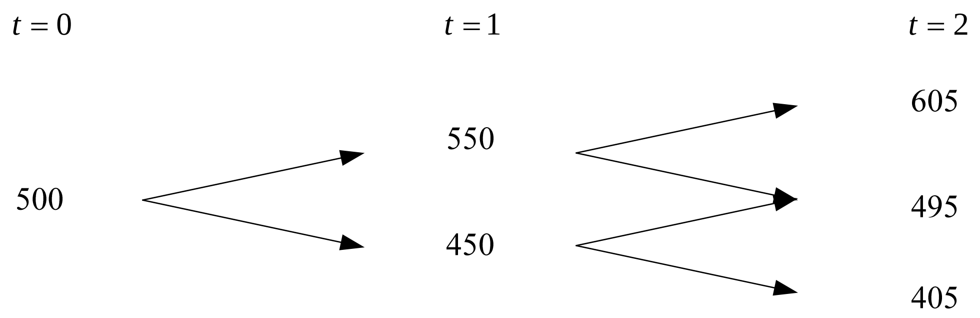
Lösungshinweise zum Aufgabenteil aus Kapitel 12

Aufgabe 12.A

Für die Aktienkursentwicklung gilt:



Es ist p = 0,75. Aus den Optionswerten in t = 2, P_{uu} = 0, P_{ud} = 5 und P_{dd} = 95, folgen die Optionswerte in t = 1 und schließlich der Optionswert in t = 0:

$$P_u^A = \max\left[\max\left(0, K - u \cdot S\right), \frac{p \cdot P_{uu} + (1-p) \cdot P_{ud}}{r}\right]$$

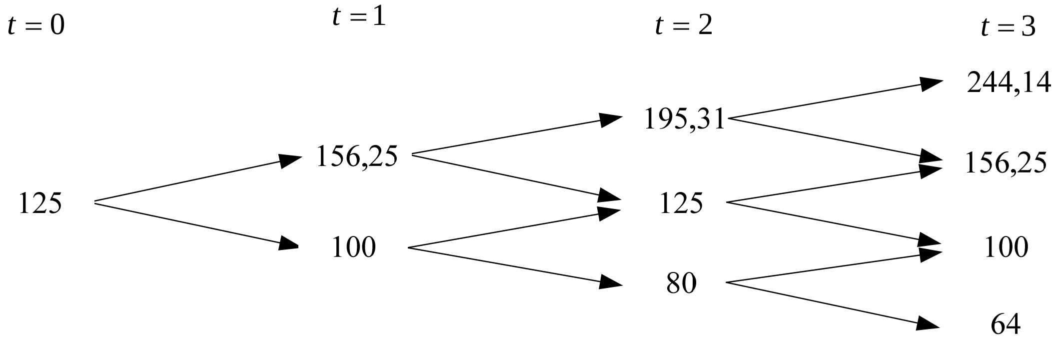
$$= \frac{0,75 \cdot 0 + 0,25 \cdot 5}{1,05} = 1,19$$

$$P_d^A = \max\left[50, \frac{0,75 \cdot 5 + 0,25 \cdot 95}{1,05}\right] = 50$$

$$P^A = \frac{0,75 \cdot 1,19 + 0,25 \cdot 50}{1,05} = 12,75$$

Aufgabe 12.B

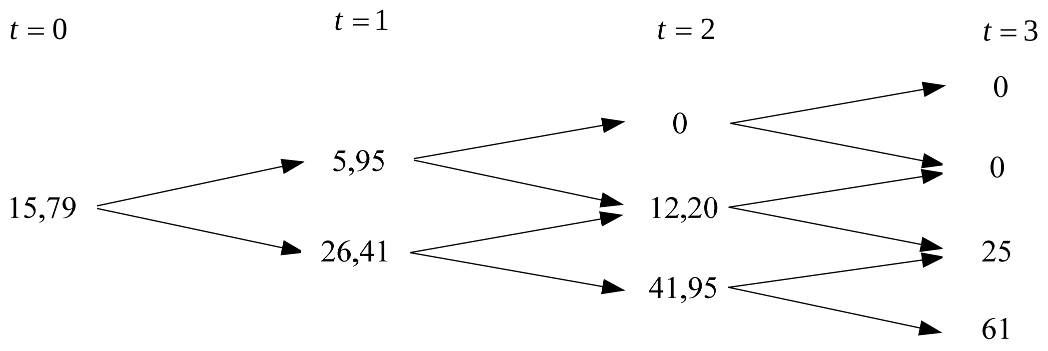
Folgende Aktienkursentwicklung wird in der Aufgabe unterstellt:



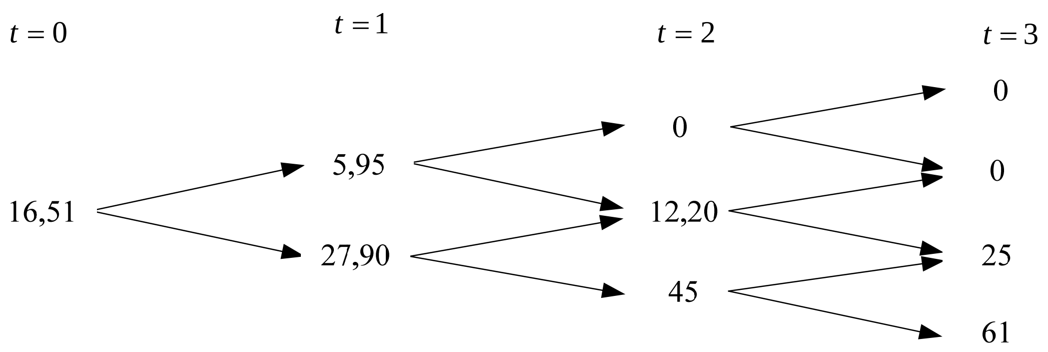
Es ist weiter:

$$p = \frac{r-d}{u-d} = \frac{1,025-0,8}{1,25-0,8} = 0,5$$

Daraus berechnen Sie „wie üblich“ die folgenden Werte für eine europäische Verkaufsoption:



Für eine amerikanische Verkaufsoption folgt dann:



Aufgabe 12.C

Zu 1. Mit d = 0,9 und u = 1,1 bestimmt man die Pseudowahrscheinlichkeit nach Gl. 12.7 zu p^W = 0,4754. Es folgt für den Wert der Verkaufsoption:

$$P^{W,E} = \frac{p^W \cdot P_u^{W,E} + \left(1-p^W\right) \cdot P_d^{W,E}}{r_d}$$

$$= \frac{0,4754 \cdot 0 + 0,5246 \cdot 0,12}{1,01} = 0,0623$$

Zu 2. Der Delta-Wert folgt zu:

$$\Delta^{W,P} = \frac{P_u^{W,E} - P_d^{W,E}}{\left(u-d\right) \cdot S \cdot r_f} = \frac{0-0,12}{\left(1,1-0,9\right) \cdot 1,20 \cdot 1,015} = -0,4926$$

Aufgabe 12.D

Zu 1. Es folgt zunächst p = 0,20. Für die Optionswerte erhält man:

$$C_{uu}^{W,E} = 3,90, C_{ud}^{W,E} = 0,70, C_{dd}^{W,E} = 0$$

$$C_{u}^{W,E} = 1,12$$

$$C_{d}^{W,E} = 0,12$$

$$C^{W,E} = 0,27$$

Zu 2. Die Duplikation der Kaufoptionswerte in t = 1 durch die Position in Fremdwährung und die risikofreie Investition führt zu den folgenden Bedingungen:

$$\Delta^{W,C} \cdot u \cdot S \cdot r_f + B^{W,C} \cdot r_d = C_u^{W,E}$$

$$\Delta^{W,C} \cdot d \cdot S \cdot r_f + B^{W,C} \cdot r_d = C_d^{W,E}$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die gesuchte Formel 12.5.

Zu 3. Das Delta bestimmt sich nach Gl. 12.5 zu 0,40.

Strategie	Zahlungsstrom in Heimatwährung in t = 0	Zahlungsstrom in t = 1 in Heimatwährung S = 4,00	S = 2,00
Kauf Call	– 0,27	+ 1,12	+ 0,12
Geldaufnahme von 0,4 Einheiten Fremdwährung	+ 1,00 = 0,40·2,5	– 2,00 = 0,40·1,25·4	– 1,00 = 0,40·1,25·2
Geldanlage in Heimatwährung	– 0,73	+ 0,88 = 0,73·1,2	+ 0,88 = 0,73·1,2
Summe		= 0	= 0

Zu 4. Im Fall $r_d < r_f$ hat die amerikansiche Währungskaufoption im Allgemeinen einen höheren Wert als die europäische Währungskaufoption. Man erhält:

$$C_u^{W,A} = \max\left[\max\left(0, u \cdot S - K\right), \frac{p \cdot C_{uu}^{W,E} + (1-p) \cdot C_{ud}^{W,E}}{r_d}\right] =$$

$$= \max\left(1,50; \frac{0,2 \cdot 3,90 + 0,8 \cdot 0,70}{1,2}\right) = 1,50$$

$$C_d^{W,A} = 0,12$$

$$C^{W,A} = \max\left[\max\left(0, K - S\right), \frac{p \cdot C_u^{W,A} + \left(1-p\right) \cdot C_d^{W,A}}{r_d}\right] = 0,33$$

Aufgabe 12.E

Aus der Black/Scholes-Differentialgleichung

$$\frac{\partial C^E}{\partial t} + i \cdot S \cdot \frac{\partial C^E}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C^E}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 = i \cdot C^E$$

folgt mit dem Ersetzen der Optionskennzahlen:

$$-\Theta^C + i \cdot S \cdot \Delta^C + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot \sigma^2 \cdot S^2 = i \cdot C^E$$

Für ein Delta-neutrales Portfolio ergibt sich:

$$-\Theta^C + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \sigma^2 \cdot S^2 = i \cdot C^E$$

Für eine Delta-Gamma-neutrale Position gilt:

$$-\Theta^C = i \cdot C^E$$